

## Energiebilanz des Federpendels

### Herleitung der Energiebetrachtung

Zwei kleine Ergänzungen zu den bisherigen Formeln:

$$\text{Frequenz: } f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} \quad \text{und} \quad \text{Periodendauer} \quad T = \frac{1}{f} = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$$

### Maximale Spannenergie und maximale kinetische Energie des Federpendels



Durch die Spannung der Feder wird Energie gespeichert – nämlich genau diejenige Menge, die man zum Spannen der Feder benötigt

Die Maximalauslenkung wird erreicht durch die Streckung/Stauchung der Feder des Federpendels. In KW 14 haben wir hergeleitet, dass für die so erreichte Spann-Energie eines Federpendels gilt:

$$E_{Max}^{Spann} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot S_{max}^2 \quad \text{bei maximaler Auslenkung}$$

Wird diese Energie umgewandelt in Bewegungsenergie, dann gilt für eine Bewegung, die sich mit einer Sinusfunktion beschreiben lässt:

$$s(t) = S_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$v(t) = s'(t) = S_{max} \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Für die kinetische Energie gilt allgemein die Formel:

$$E^{Kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v(t)^2$$

Daraus wird mit  $v(t)$  des Federpendels:

$$E^{Kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (S_{max} \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t))^2$$

Der Term  $\cos(\omega \cdot t)$  kann maximal den Wert ,1' erreichen. Deshalb gilt für die maximale kinetische Energie:

$$E_{max}^{Kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot S_{max}^2 \cdot \omega^2 \quad \text{bei } 0 - \text{Auslenkung}$$

Dieser Wert gilt exakt beim Durchlauf der Pendelmasse durch den Ruhepunkt, denn genau dann ist die Spannenergie des Pendels gleich null und die vollständige Energie des Pendels liegt in seiner Bewegung.

## Formelsammlung zum Federpendel

Momentanauslenkung des Federpendels	$s(t) = S_{\max} \cdot \sin(\omega \cdot t)$
Momentangeschwindigkeit des Federpendels	$v(t) = S_{\max} \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$
Momentanbeschleunigung des Federpendels	$a(t) = -S_{\max} \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$
Kreisfrequenz	$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$
Frequenz	$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{D}{m}}$
Periodendauer	$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$
Maximale Spannenergie der Feder	$E_{\max}^{\text{Spann}} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot S_{\max}^2$
Maximale Kinetische Energie der Pendelmasse	$E_{\max}^{\text{Kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot S_{\max}^2 \cdot \omega^2$

## Alte Klausuraufgaben zum Federpendel: Damit könnt ihr euch testen 😊

### A1: Federpendel: Berechnung von Frequenz und Masse

Gegeben sei ein Federpendel mit einer Federkonstante von  $D = 320\text{N/m}$ . Es schwingt mit der Amplitude von  $0,1\text{m}$  und einer Periodendauer von  $3\text{ Sekunden}$ .

Bestimme Frequenz, Kreisfrequenz, Masse und Maximale kinetische, bzw. maximale Spannenergie des Pendels.



### A2: Geschwindigkeit und Beschleunigung des Federpendels

Ein Gegenstand der Masse  $0.5\text{ kg}$  führt an einer Feder mit  $D = 450\text{ N/m}$  eine Schwingung mit  $S_{\max} = 0,1\text{m}$  aus.

- a) Stelle die vollständige Schwingungsgleichung auf, bestimme dazu vollständigen  $s(t) = S_{\max} \cdot \sin(\omega \cdot t)$   
*Hinweis: Gesucht sind also  $S_{\max}$  und  $\omega$ .*

- b) Berechne: Wie groß ist die maximale Geschwindigkeit der Schwingung:  $v(t) = S_{\max} \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$   
*Hinweis: Der Cosinus-Term kann maximal den Wert ,1' erreichen.*

- c) Berechne die maximale Beschleunigung der Schwingung:  $a(t) = -S_{\max} \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$   
*Hinweis: Der Sinus-Term kann maximal den Wert ,1' erreichen.*

- d) Ein Federpendel ist ein Energiespeicher. Erläutere, warum das so ist und in welcher Energieform sich die Energie im Pendel befindet. Berechne außerdem die Energie, die im Pendel gespeichert ist.

### A3: Federpendel: Berechnung von Federkonstante und Frequenz

An ein Federpendel hängt man eine **Masse von 0,6kg**. Das Pendel wird dadurch um **0,12m** gestreckt.

*Hinweis zur Umrechnung von Masse  $m$  (kg) in Kraft  $F$  (Newton):  $\text{Newton} = 10m/s^2 \cdot kg$*



**a) berechne:** Federkonstante, Kreisfrequenz und Frequenz der Pendelschwingung.



**b) Erläutere:** Wie stark streckt sich das Pendel mit zwei gleichen parallelen Federn?

**Erkläre:** Wird die Frequenz höher oder niedriger?

### A4: Federpendel als Uhr



Eine Uhr soll gebaut werden. Dazu benötigt man ein Federpendel mit der exakten Frequenz von exakt einem Hertz. Gegeben ist eine **Masse von 0,76kg**. Berechne den Aufbau des Federpendels.