Hausaufgaben Physik 3Stünder KW 17

Schwingungs-Differentialgleichung des Federpendels

Aufgabe 1) Herleitung und Lösung der DGL

Die Herleitung bitte nachvollziehen, denn mathematische Herleitungen sind elementarer Wesens-Bestandteil der Physik als Naturwissenschaft.

Wo wollen wir hin? Das Ergebnis sei hier vorweggenommen:

$$s(t) = S_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t) \qquad \text{mit:} \qquad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Vollständig gilt also:

$$\boxed{s(t) = S_{max} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right)}$$

Mit

$s(t)$:	Funktion der Momentanauslenkung, beschreibt die Bewegung des Pendels im Verlauf der Zeit	$[s(t)]$	$= m$
S_{max}:	Maximalauslenkung, Amplitude	$[S_{max}]$	$= m$
D:	Federkonstante *(siehe letzte Hausaufgabe)*	$[D]$	$= N/m$
m:	Pendelmasse	$[m]$	$= kg$
t:	Zeit	$[t]$	$= s$
ω:	Kreisfrequenz, definiert als $2 \cdot \Pi \cdot f$	$[\omega]$	$= 1/s$

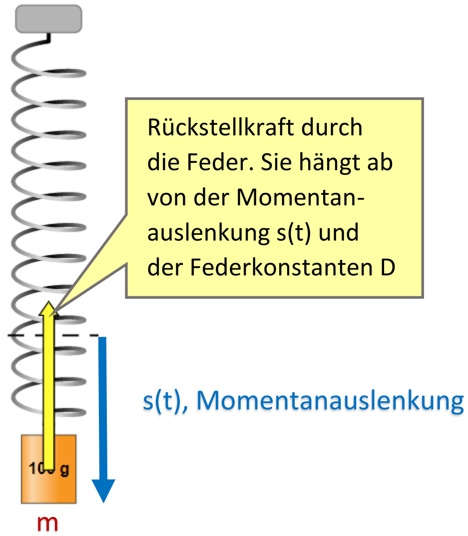
Exkurs Kreisfrequenz ω. Vervollständige die Tabelle:

Frequenz f (in Hertz, $[f] = 1/s$)	Kreisfrequenz (in Hertz, $[\omega] = 1/s$)
1	$2 \cdot \Pi \cdot f = 6{,}2832$ Hertz
10	62,832 Hertz
5	
50	

Für die Herleitung benötigen wir 3 „Zutaten", die miteinander kombiniert werden

(1) Das zweite Newtonsche Gesetz	(2) Das Hook'sche Gesetz	(3) Den Bezug von s(t) zu a(t)
$F_{Newton} = m \cdot a$ Mit a: Beschleunigung	$F_{Hook} = -D \cdot s$	$s'(t) = v(t)$ $v'(t) = a(t)$ $s''(t) = a(t)$

Kombination von (1) und (2):



Das Massestück m erfährt eine Momentanbeschleunigung a(t), welche durch die gespannte Feder hervorgerufen wird. Die

Deshalb sind die Newton'sche Kraft und die Hook'sche Kraft gleich groß, aber entgegengesetzt:

$$F_{\mathrm{Newton}} = F_{\mathrm{Hook}}$$

$$m \cdot a(t) = -D \cdot s(t)$$

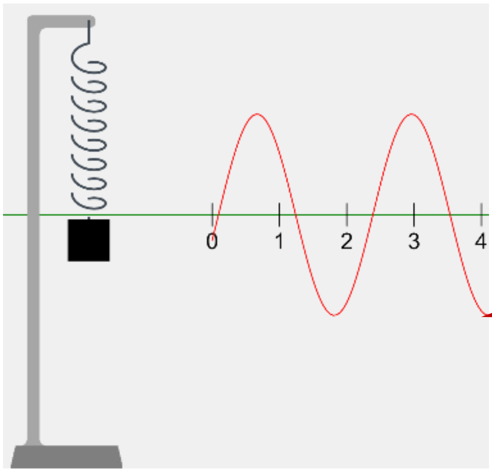
Kombination mit (3):

$$\boxed{m \cdot s''(t) = -D \cdot s(t)}$$

Das ist die sogenannte Schwingungs-Differentialgleichung („Schwingungs-DGL"). Eine Gleichung wird Differentialgleichung genannt, wenn eine Funktion (*hier: s(t)*) mit ihrer Ableitung (*hier: s"(t)*) verknüpft wird. *<u>Keine Angst, es steckt nicht mehr dahinter!</u>*

Bestimmung von s(t)

Welche Funktion muss man für s(t) wählen, damit die Gleichung erfüllt ist?



Ein völlig legitimer Ansatz ist es, die Lösung geeignet zu raten!

Eine geeignete Funktion sollte, wie man aus der Bewegung in der Simulation entnehmen kann, wahrscheinlich die Sinus-Funktion sein.

$$s(t) = S_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Überprüfung von s(t):

Wir überprüfen, ob der Lösungsansatz stimmt, indem wir

- im ersten Schritt s(t) zweifach Ableiten
- und im zweiten Schritt sowohl s(t) als auch s"(t) in die DGL einsetzen

Erster Schritt: zweifache Ableitung

$$s(t) = S_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$s'(t) = S_{max} \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Ableitung von sin()

Innere Ableitung von ω·t

$$s''(t) = S_{max} \cdot \omega \cdot \omega \cdot -\sin(\omega \cdot t) = -S_{max} \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Ableitung von cos()

Erneute Innere Ableitung von ω·t

Zweiter Schritt: Einsetzen in die DGL:

$$m \cdot s''(t) = -D \cdot s(t)$$

$$m \cdot \boxed{-S_{max} \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)} = -D \cdot \boxed{S_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t)}$$

Leicht umgestellt sieht das dann so aus:

$$m \cdot \omega^2 \cdot \boxed{-S_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t)} = D \cdot \boxed{-S_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t)}$$

Diese Terme kann man kürzen, sie fallen weg.

Dann steht dort nur noch:

$$m \cdot \omega^2 = D$$

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Vollständig gilt also: $s(t) = S_{max} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right)$

Übungsaufgaben zum Federpendel

a) Ein Federpendel besteht aus einer Feder mit Federkonstante $D = 5$ N/m und einer Masse $m = 0{,}5$kg. Mit welcher Kreisfrequenz ω schwingt das Pendel? Welcher Frequenz f entspricht das?

b) Gegeben sei ein Federpendel mit einer Federkonstante von $D = 20$N/m. Es schwingt mit einer Frequenz von $f = 1$ Hertz. Bestimme die Kreisfrequenz ω des Pendels. Berechne weiterhin die Masse m des Pendels.

c) Man will ein Federpendel konstruieren, welches mit genau $f = 10$ Hertz schwingt. Welcher Kreisfrequenz ω entspricht das? Die Masse m soll 0,1 kg betragen. Welche Federkonstante benötigt man?

d) Das Pendel aus a) soll nun mit doppelter Frequenz schwingen, allerdings soll die Feder gleich bleiben, es soll lediglich ein anderes Massestück m angehängt werden. Welche neue Masse muss das Federpendel tragen?